Nome ______________________________ N.º ____ Turma _____ Data ____ /mar./2019

Avaliação ______________________________ Professor ________________________

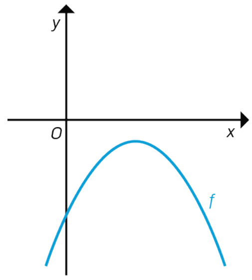
Teste 4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL.
CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Na figura está representada parte de uma parábola cujo vértice pertence ao quarto quadrante.



Esta parábola é o gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

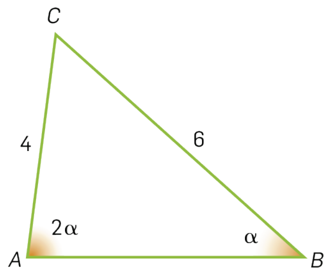
(A) $f'(0)+f(0)\times f''(0)$ **(B)** $f(0)+f'(0)\times f''(0)$

(C) $[f''(0)+f(0)]\times f'(0)$ **(D)** $[f'(0)-f(0)]\times f''(0)$

2. Seja a um número real maior do que 1. Qual é o valor de $\frac{\log_a(9)+2\log_a(4)}{\log_a(24)-\log_a(2)}$?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

3. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC}=4$
- $\overline{BC}=6$
- $A\hat{B}C=\alpha$
- $B\hat{A}C=2\alpha$

Qual é o valor de $\cos(2\alpha)$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{9}$

4. Seja b um número real positivo menor do que 1.

Seja S o conjunto das soluções da equação $\operatorname{sen}^2 x = b$ que pertencem ao intervalo $\left[0,\frac{9\pi}{2}\right]$.

Escolhem-se ao acaso dois elementos de S.

Qual é a probabilidade de ambos pertencerem ao intervalo $\left[\frac{5\pi}{2},4\pi\right]$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{10}$ **(D)** $\frac{1}{12}$

5. Num clube desportivo, há tantos praticantes de andebol como de basquetebol.

Um terço dos praticantes de basquetebol pratica andebol.

Metade dos atletas do clube não pratica andebol nem basquetebol.

Escolhe-se ao acaso um atleta desse clube. Qual é a probabilidade de ele praticar andebol?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}35$ **(D)** $0{,}4$

Grupo II

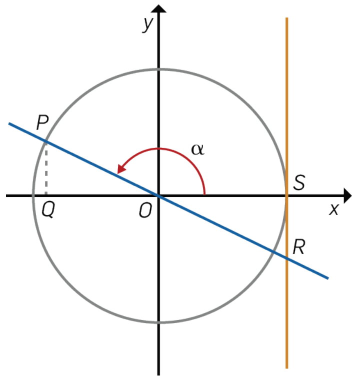
Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Na figura está representada a circunferência trigonométrica.

Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no segundo quadrante.

Para cada posição do ponto P, seja:

- Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox;
- R o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$;
- α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.



Seja S o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Determina o valor de α para o qual a área do triângulo $[ORS]$ é dupla da área do triângulo $[OPQ]$.

2. Considera a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 2 - e^{\sqrt{3}x} \cos x$.

a) Mostra que $f'(x) = e^{\sqrt{3}x} \operatorname{sen} x - \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} \cos x$ e estuda a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

b) Seja A o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto A.

Seja B o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

Determina a amplitude (em radianos) do ângulo OAB.

3. Seja h a função, de domínio $]-\infty, \pi[$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 3x + 2 + \dfrac{\ln\,(1-x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\,(2x)}{x(1+\cos x)} & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Justifica que a função h é contínua para $x = 0$.

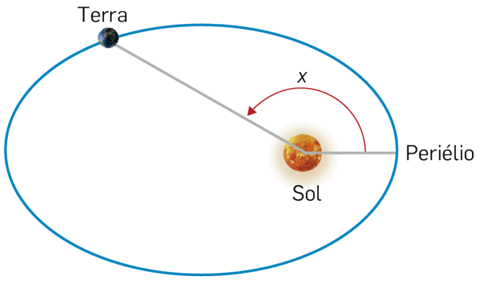
b) Estuda a função h quanto às assíntotas ao seu gráfico.

c) Justifica que $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[: h(c) = \frac{1}{\pi}$.

4. A Terra descreve uma órbita elítica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita, em que se assinala o periélio, o ponto da órbita mais próximo do Sol.

Na figura está também assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[)$. Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o lado origem passa no periélio e o lado extremidade passa na Terra.



Sabe-se que:

- x verifica a relação $\frac{2\pi t}{365{,}24} = x - 0{,}017 \operatorname{sen} x$, em que t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- a distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é dada, em função de x, por $d = \frac{149{,}6}{1 + 0{,}017 \cos x}$.

Determina a distância a que a Terra se encontra do Sol, 200 dias depois de ter passado pelo periélio.

Apresenta o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utiliza, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução deste item envolve uma equação que deve ser resolvida com recurso às capacidades gráficas da calculadora; na tua resposta, apresenta, num referencial, o(s) gráfico(s) visualizado(s), devidamente identificado(s).

5. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \cos x$.

Considera que um ponto P se move ao longo do gráfico de f. Para cada posição do ponto P, sejam r e s as retas que passam por P e são paralelas aos eixos Ox e Oy, respetivamente.

Seja g a função que à abcissa x do ponto P faz corresponder a área da região limitada pelos eixos coordenados e pelas retas r e s.

Mostra que a função g tem máximo

FIM