5+5

Teste 4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Soluções

Grupo I

1. (A)

2. (A)

3. (C)

4. (D)

5. (B)

Grupo II

1. $\frac{3\pi}{4}$

2.

a) $f'(x) = \left(2 - e^{\sqrt{3}\,x}\cos x\right)' = -\left(e^{\sqrt{3}\,x}\cos x\right)' = -\left(\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}\,x}\cos x - e^{\sqrt{3}\,x}\operatorname{sen} x\right) =$

$= e^{\sqrt{3}\,x}\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}\,x}\cos x$

A função é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$;

atinge um máximo relativo para $x = -\frac{\pi}{3}$ e atinge um mínimo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$.

b) $\frac{\pi}{6}$

3.
a)

- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x + 2 + \frac{\ln(1-x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2) + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x} =$

  $= 2 + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}$

  Seja $y = \ln(1-x)$. Vem $1 - x = e^y \Leftrightarrow x = -e^y + 1$.

  Quando $x \to 0^-$, tem-se que $y \to 0^+$.

  Portanto, $2 + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x} = 2 + \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y}{-e^y+1} =$

  $= 2 - \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = 2 - \frac{1}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{sen}(2x)}{x\,(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{sen}(2x)}{x} \times \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\,\text{sen}(2x)}{2x} \times \dfrac{1}{1+1} = 2 \times \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{sen}(2x)}{2x} \times \dfrac{1}{2} =$

$= 2 \times \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\text{sen}\, y}{y} \times \dfrac{1}{2} = 2 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 1$

- $h(0) = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = h(0)$, concluímos que a função h é contínua no ponto 0.

b) A reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico da função h.

A reta de equação $y = 3x + 2$ é assíntota ao gráfico da função h em $-\infty$.

c) Tem-se que:

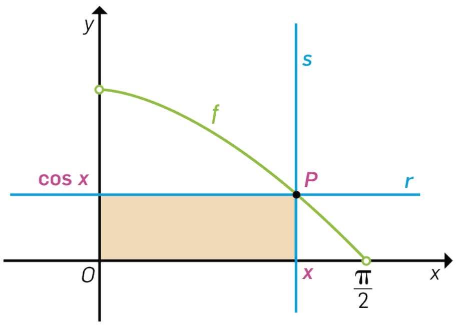
- a função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} \times \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\text{sen}\,\pi}{\frac{\pi}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}(1+0)} = 0$

Como a função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ e como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{\pi} < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[: h(c) = \frac{1}{\pi}$.

4. $152{,}1$ milhões de quilómetros

5. A região limitada pelos eixos coordenados e pelas retas r e s é um retângulo de lados x e $\cos x$, cuja área é, portanto, $x \cos x$.



Tem-se assim que g é a função de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $g(x) = x \cos x$.

Seja h a função de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $h(x) = x \cos x$.

Esta função é contínua e está definida num intervalo limitado e fechado, pelo que, de acordo com o teorema de Weierstrass, tem máximo e mínimo absolutos.

Como esta função nunca toma valores negativos, o mínimo da função é zero, valor que é atingido nos extremos do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ora, como a função h não é sempre nula, o máximo é um valor positivo, atingido em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e, dado que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ g(x) = h(x)$, conclui-se que a função g tem máximo.