

EXPOENTE¹²

MATEMÁTICA A

ASA

Daniela Raposo
Luzia Gomes

PROFESSOR + EXPOENTE¹² = ALUNO SUCESSO



www.expoente12.asa.pt

O EXPOENTE¹² NA SALA DE AULA

Revisão científica por

CLÁUDIA MENDES ARAÚJO
(UNIVERSIDADE DO MINHO)

FILIPE CARVALHO

(INSTITUTO POLITÉCNICO DE VIANA DO CASTELO)



TEMA III

Funções Reais de Variável Real

1. Limites
2. Continuidade
3. Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão

Desafio – Um triângulo retângulo deslizando

São dados:

- a reta r e um seu ponto A ;
- um ponto B à distância de 10 cm de r e de A ;
- a semirreta s com origem em B e paralela a r ;
- um ponto P , não coincidente com B , que se move sobre a semirreta s .

Para cada posição de P , define-se um triângulo $[APQ]$, retângulo em P , com Q pertencente a r . Seja x a distância de P a B .

1. O que acontece à área do triângulo $[APQ]$ quando P se aproxima de B , quase coincidindo com ele?
2. E quando P se afasta de B , seguindo para infinito?
3. Para que valor de x a área é mínima e qual é essa área?

José Paulo Viana

- **Desafios motivadores** da autoria de **José Paulo Viana** **NOVIDADE**

Estes desafios podem ser revisitados no final do tema, para que os alunos apliquem os conteúdos estudados na sua resolução

- **Revisão de conteúdos dos anos anteriores** ao serviço de uma aprendizagem cumulativa

TEMA III Funções Reais de Variável Real

UNIDADE 1
Limites

1.1. Revisões

Considera a sucessão (u_n) e o termo geral u_n .

- Determina os primeiros termos da sucessão.
- Indica, justificando, o valor lógico de uma das seguintes proposições.
 - $\exists n \in \mathbb{N}, u_n = 1$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n < 3$

Nota
A sucessão (u_n) pode também representar-se por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou ainda por u_n , quando estas notações não forem ambíguas.

Definição de sucessão real * termo geral
Chama-se **sucessão real** a uma função u de domínio \mathbb{N} e conjunto de chegada \mathbb{R} , $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Representa-se por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente por (u_n) .

Em geral, usamos as letras u, v, w, \dots ou a, b, c, \dots para designar uma sucessão. A imagem de um número natural n , por u , chama-se **termo de ordem n** e representa-se por u_n ou por $u(n)$.

A expressão designatória que define a sucessão u designa-se por **termo geral da sucessão** e representa-se por u_n .

O gráfico de qualquer sucessão é constituído pelo conjunto de pontos de coordenadas (n, u_n) , com $n \in \mathbb{N}$. Logo, será sempre um conjunto de pontos isolados.

Exemplo
Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.
 $u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}$ e $u_3 = \frac{2}{4}$ são os primeiros três termos da sucessão.

A representação gráfica de (u_n) é:

PROFESSOR
2.ª AVALIAÇÃO
Resolva todos os exercícios de "Limites".

Soluções
L
a) $u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}$ e $u_3 = \frac{2}{4}$
b) Proposição falsa.
c) Proposição verdadeira.

UNIDADE 1 Limites

Limites de sucessões

Definição
Dada uma sucessão (u_n) , um número real l diz-se **limite da sucessão (u_n)** ou **limite de u_n** , quando n tende para $+\infty$, quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$ e escreve-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou simplesmente $\lim u_n = l$. Nesta situação, diz-se que u_n tende para l .

Nota
Se existir um número real l tal que $u_n \rightarrow l$, diz-se que a sucessão (u_n) é **convergente**. Caso não seja convergente, a sucessão diz-se **divergente**.

Exemplos
1. $\lim \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim \frac{1}{n^2} = 0$
3. $\lim 2 = 2$

Definição
Uma sucessão (u_n) tem **limite $+\infty$** , e escreve-se $\lim u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$. Nesta situação, diz-se que u_n tende para $+\infty$ e representa-se por $u_n \rightarrow +\infty$.

Exemplos
1. $\lim n = +\infty$
2. $\lim n^2 = +\infty$
3. $\lim \sqrt{n} = +\infty$

Definição
Uma sucessão (u_n) tem **limite $-\infty$** , e escreve-se $\lim u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$. Nesta situação, diz-se que u_n tende para $-\infty$ e representa-se por $u_n \rightarrow -\infty$.

Exemplos
1. $\lim (-n) = -\infty$
2. $\lim (-n^2) = -\infty$
3. $\lim (-\sqrt{n}) = -\infty$

7

- **Explicação facilitadora da aprendizagem**, com recurso frequente a **exemplos do quotidiano**
- **Definições, teoremas, propriedades e notas** devidamente **destacados** para uma mais fácil identificação

2.1. Teorema dos valores intermédios

Considera as duas situações seguintes:

Caso 1
Um depósito encontrava-se vazio. Numa manhã, começaram a enchê-lo de água. No final desse dia, a altura da água no depósito era de 3 metros.

- entre 1 e 2 anos (inclusive) de serviço na empresa: 1100 euros
- entre 2 e 3 anos (inclusive) de serviço na empresa: 1200 euros
- mais de 3 anos de serviço na empresa: 1300 euros

Repara que, no caso 1, a altura da água não passa de 0 para 3 metros, sem passar por todos os valores intermédios entre 0 e 3, ou seja, a altura da água varia continuamente com o tempo que decorre desde o início do enchimento. Porém, no caso 2, não é verdade que o salário varie continuamente com o tempo de serviço do trabalhador, pois, por exemplo, o vencimento passa de 1000 para 1100 euros sem passar por nenhum dos valores intermédios.

Consideremos, agora, quatro funções de domínio $[a, b]$ e as respetivas representações gráficas:

Seja k um valor qualquer compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$.

UNIDADE 2 Continuade

Contextualização Histórica

Bernard Bolzano (1781-1848)
Bolzano foi um matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia (atual República Checa). Os seus estudos científicos eram muito avançados para a época, nos mais variados ramos da Matemática e da Lógica. As suas descobertas foram muito pouco reconhecidas pelos seus contemporâneos. Sempre se preocupou com o rigor nas provas matemáticas e demonstrou, entre outros casos, o teorema dos valores intermédios. Distinguiu-se como um dos maiores lógicos do séc. XIX e é considerado um precursor da teoria de conjuntos de Cantor. Devemos também a Bolzano importantes estudos sobre funções contínuas não deriváveis e trabalhos pioneiros sobre convergência de séries.

TEMA III Funções Reais de Variável Real

Sejam g uma função real de variável real x e b dois números reais pertencentes ao domínio da função g tais que $a < b$ e $g(a) < 0 < g(b)$. Porém, não existe nenhum número real k tal que $a < k < b$ e $g(k) = 0$. Explica que característica terá a função g de modo a permitir que esta situação aconteça. Ilustra a tua resposta com um exemplo adequado.

Como nos três casos, em nenhum deles se passa de um valor a outro sem passar pelo zero. Este teorema foi usado por Euler e Gauss, mas foi Bolzano quem o enunciou.

Teorema dos valores intermédios ou teorema de Bolzano
Dada uma função real de variável real f , contínua num intervalo $I = [a, b]$, com $a < b$, para qualquer valor $k \in$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$, ou seja:
 f é contínua em $[a, b]$
 $f(a) < k < f(b)$ ou $f(b) < k < f(a)$ } $\Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = k$

Notas
2. O teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de um valor c no intervalo com $f(c) = k$.

PROFESSOR
FRIR2_21
Solução
18. A função g não é contínua em $[a, b]$, por exemplo:

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, isto é, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então a função f tem pelo menos um zero em $]a, b[$, ou seja:
 f é contínua em $[a, b]$
 $f(a) \times f(b) < 0$ } $\Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$

22

PARA O SUCESSO NO EXAME

- Mais de 190 exercícios resolvidos que abrangem todas as tipologias presentes em Exame



- Chamadas de atenção para os erros habitualmente cometidos

UNIDADE 2 Continuidade

Exercícios resolvidos

1. Consideremos a função polinomial, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5$. Prova que a equação $f(x) = -\pi$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-1, 1[$.

Sugestão de resolução

Provar que a equação $f(x) = -\pi$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-1, 1[$ é equivalente a provar a existência de pelo menos um número real $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = -\pi$. Se reunirmos as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano-Cauchy, podemos provar o pretendido. Vejamos:

- f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial; em particular, é contínua em $]-1, 1[$.

concluir que existe pelo menos uma solução para a equação $f(x) = -\pi$.

ERRO TÍPICO

Um dos erros mais comuns no uso do teorema de Bolzano-Cauchy para provar a existência de uma solução para a equação $f(x) = k$ no intervalo aberto $]-1, 1[$, é aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy no intervalo fechado $[-1, 1]$. De facto, se a função não for contínua no intervalo $[-1, 1]$, não se pode concluir através do teorema de Bolzano-Cauchy a existência de uma solução para a equação $f(x) = k$ no intervalo aberto $]-1, 1[$.

PROFESSOR

Solução

20. Por exemplo, a função f definida no intervalo $[1, 3]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- Verificação imediata da aprendizagem através dos **exercícios de aplicação direta propostos na margem lateral**
- Rápida correção dos exercícios em sala de aula possibilitada pelas **soluções integradas no Manual do Professor**
- **Indicação das Metas Curriculares trabalhadas em cada página**
- **Sugestões para o professor para uma gestão flexível do currículo**

TEMA III Funções Reais de Variável Real

3.6. Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto

Já sabias que, se uma função f indica a distância percorrida por um móvel, que se desloca num percurso linear, em função do tempo, a taxa média de variação de f , no intervalo $[a, b]$, é a velocidade média do móvel entre os instantes a e b , e a derivada de f em a é a velocidade do móvel em a .

Consideremos o seguinte exercício resolvido.

Exercício resolvido

Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica cuja unidade é o metro. A abscissa (nessa reta) da respetiva posição no instante t , em segundos, é dada por:

$$p(t) = 4t^2 + 20t$$

a) Determina a velocidade média entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.

b) Calcula a velocidade no instante $t = 2$.

c) Supondo que a partícula esteve em movimento entre os instantes $t = 0$ e $t = 8$, qual é a velocidade máxima atingida? Qual é a aceleração da partícula nesse instante?

Sugestão de resolução

a) $t.m.v._{[0, 2]} = \frac{p(2) - p(0)}{2 - 0} = \frac{56 - 0}{2} = 28 \text{ m/s}$

A velocidade média da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ é de 28 metros por segundo.

A velocidade no instante $t = 2$ é igual a $p'(2)$:

$$p'(t) = 8t + 20$$

$$p'(2) = 8 \times 2 + 20 = 36 \text{ m/s}$$

A velocidade no instante $t = 2$ é igual a 36 metros por segundo.

Para determinar a velocidade máxima entre os instantes $t = 0$ e $t = 8$, vamos analisar o máximo da função p' ; para tal, determinemos a derivada $p''(t) = 8$.

$\forall t \in [0, 8]$, então p' é estritamente crescente em $[0, 8]$. Logo, no intervalo considerado, ou seja, a partícula atinge a velocidade máxima em $t = 8$.

A partícula no instante $t = 8$ é igual à derivada de p' em $t = 8$:

$$p''(8) = 8$$

A velocidade máxima da partícula no instante $t = 8$ é igual a 8 m/s.

Soluções

54. a) 6 cm/s b) 30 cm/s c) 22 cm/s² d) A velocidade diminui no intervalo de tempo $\left]0, \frac{2}{3}\right[$ e aumenta no intervalo de tempo $\left]\frac{2}{3}, 60\right[$; atinge a velocidade máxima em $t = 2$.

• Remissão para **exercícios de consolidação, organizados em três graus de dificuldade**

TEMA III Funções Reais de Variável Real

3.4. Problemas de otimização

A modelação consiste em encontrar funções, a que chamamos modelos, adequadas à resolução de problemas das mais diversas áreas da ciência. No caso particular em que a solução do problema reside na determinação de um extremo relativo (máximo ou mínimo), dizemos que estamos perante um problema de otimização.

São os casos, por exemplo, das empresas que querem maximizar o lucro, os investidores que pretendem maximizar os dividendos e minimizar os riscos, dos viantes que querem minimizar o tempo gasto para fazer determinado percurso, ...

Um método geral para resolver problemas de otimização envolve várias etapas, das quais destacamos:

Ler e pensar – Deves ler o enunciado com atenção e pensar. Deves identificar aspetos essenciais do problema, questionar-te sobre se alguma técnica te parece mais apropriada, se existem estimativas razoáveis para a resposta, ...

Construir um modelo matemático – Certifica-te de que identificaste e interpretaste corretamente o problema. Escolhe as variáveis e estabelece relações entre elas. Limita os domínios das variáveis àquelas para as quais o problema faz sentido.

Aplicar métodos de redução – Verifica se é possível eliminar variáveis por substituição.

Resolver o problema – Resolve o problema usando as técnicas de cálculo.

Interpretar e validar – Depois de resolves o problema, verifica se a solução faz sentido.

Exercícios resolvidos

1. Considera os retângulos que se podem inscrever no gráfico da função $y = 1 - x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$, em que a base se encontra no eixo Ox e os dois vértices superiores estão sobre o gráfico da função. Determina a maior área possível desses retângulos.

Sugestão de resolução

Sejam $x \in]0, 1[$, $2x$ o comprimento de cada um dos retângulos que se podem construir nas condições referidas e y a sua largura.

Determinemos uma expressão da área dos retângulos em função de x :

$$A(x) = x \times y$$

$$A(x) = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3, \text{ com } x \in]0, 1[$$

$$A'(x) = (2x - 2x^3)' = 2 - 6x^2$$

PROFESSOR

FRUR12_5.3

APP ALL-4-DIGITAL

Simulador GeoGebra a central eletrónica

Soluções

46. a) A menor quantidade de cerca que se pode gastar é 300 m.
b) O parque terá 150 m de comprimento por 50 m de largura.

47. Comprimento e largura iguais a 15 cm.

UNIDADE 3 Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
Sinal de A'	n.d.	+	-
Varição de A	n.d.	\nearrow	\searrow
		Máx.	

Cálculo auxiliar

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

O valor máximo da área é $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

2. Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, a partir de um pedaço de cartolina de 6 cm por 6 cm, cortando quadrados nos cantos e dobrando os lados para cima. Seja x o lado dos quadrados recortados. Determina o valor de x que maximiza o volume da caixa e calcula o volume máximo.

Sugestão de resolução

A base da caixa é um quadrado de lado $6 - 2x$ e a altura da caixa é x . Logo:

$$V(x) = (6 - 2x)^2 x = (36 - 24x + 4x^2)x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \text{ com } x \in]0, 3[$$

$$V'(x) = (4x^3 - 24x^2 + 36x)' = 12x^2 - 48x + 36$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

APRENDE FAZENDO

Págs. 70, 74 e 75
Exercícios 25, 26, 41, 42, 43, 44, 52, 53 e 54

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 31
Exercícios 18, 19, 20 e

• Itens de seleção e de construção

TEMA III Funções Reais de Variável Real

Itens de seleção

que a primeira derivada é negativa em R e que a segunda derivada seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g ?

(B)

(C)

(D)

Solução: Opção (A).

7. Considera a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4}$$

Sabe-se que uma função h é tal que $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) > -f(x)$. Qual dos seguintes valores pode ser o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$?

(A) 2 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Solução: Opção (C).

8. Considera as funções f e g definidas em $]-3, 0[$ por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} \text{ e } g(x) = \frac{(x+3)^2 - 9}{12\sqrt{3}(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})}$$

Sabe-se que uma função h é tal que $\forall x \in]-3, 0[, g(x) \leq h(x) \leq f(x)$. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$?

(A) 2 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Solução: Opção (B).

9. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-1, 3]$. Tem-se que $f(-1) = 3$ e $f(3) = 8$. Indica qual das expressões seguintes define uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $[-1, 3]$.

(A) $g(x) = x + f(x)$ (B) $g(x) = x - f(x)$ (C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

Solução: Opção (D).

TEMA III Funções Reais de Variável Real

Itens de construção

com um triângulo retângulo, como se vê no gráfico. Os catetos de comprimento do triângulo retângulo inscrito que

Figura: 2,5 cm

46. Uma caixa é fabricada de modo a ter de capacidade $4\pi \text{ cm}^3$. O preço, por cm^2 , do material de construção das duas bases é o dobro do preço do material utilizado na parte lateral. Quais serão as dimensões da lata para que o custo de produção seja mínimo?

Solução: Raio: 1 cm; altura: 4 cm.

43. A resistência de uma viga de madeira cuja base é retangular é proporcional ao produto da sua largura (l) pelo quadrado do seu comprimento (c). Determina as dimensões, com aproximação às milésimas, da viga com maior resistência que se pode cortar de um tronco de madeira cujo diâmetro é 30 cm.

Solução: Largura: 7,663 cm; comprimento: 29,001 cm.

44. Uma empresa pretende criar um folheto publicitário de forma retangular com uma área impressa de 25 cm^2 , rodeada por margens de 2 cm de cada lado e de 4 cm em cada um dos topos. Quais as dimensões da menor folha de papel que pode ser usada para fazer o folheto nestas condições?

Solução: Largura: $(\frac{\sqrt{2}}{2} + 4)$ cm; comprimento: $(\sqrt{2} + 4)$ cm.

45. Estuda e representa graficamente as funções definidas por:

a) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ b) $g(x) = \frac{1}{x^2-9}$ c) $h(x) = x - \frac{1}{x}$

d) $k(x) = x^{\frac{2}{3}}$ e) $j(x) = \sqrt[3]{x-1}$ f) $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Soluções: Consultar nas páginas 222 e 223.

46. Enuncia o teorema das sucessões enquadadas e usa-o para determinar o limite das sucessões de termo geral:

a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{k^2+k}$ b) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{5n-1}{2k^2+k}$

Soluções: a) 2 b) 5

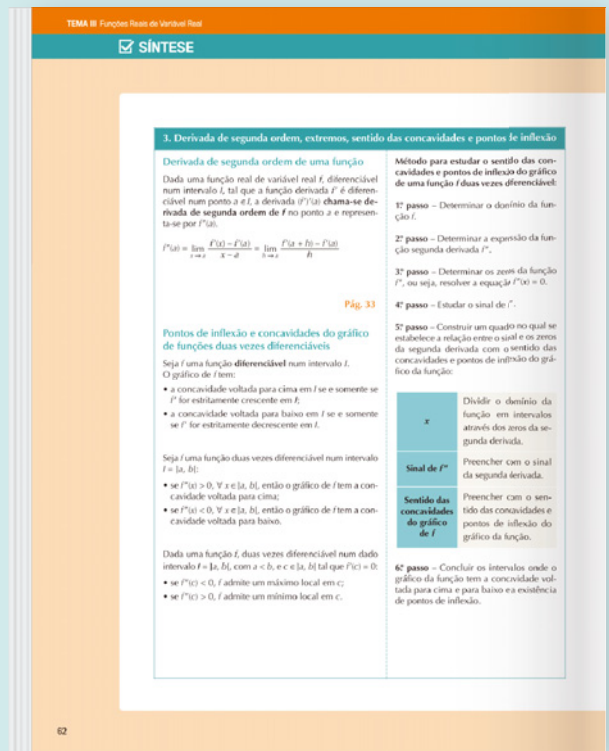
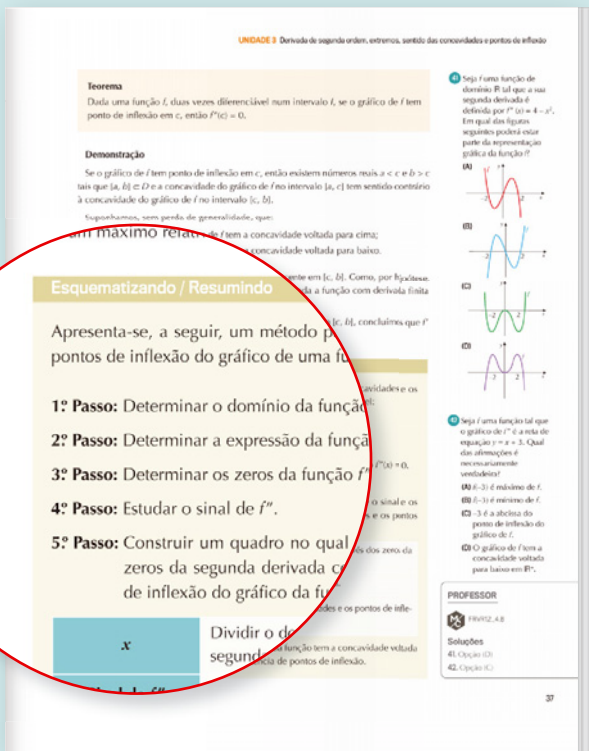
SISTEMATIZAÇÃO REGULAR de conteúdos

para melhor **ORGANIZAÇÃO**
de conhecimentos

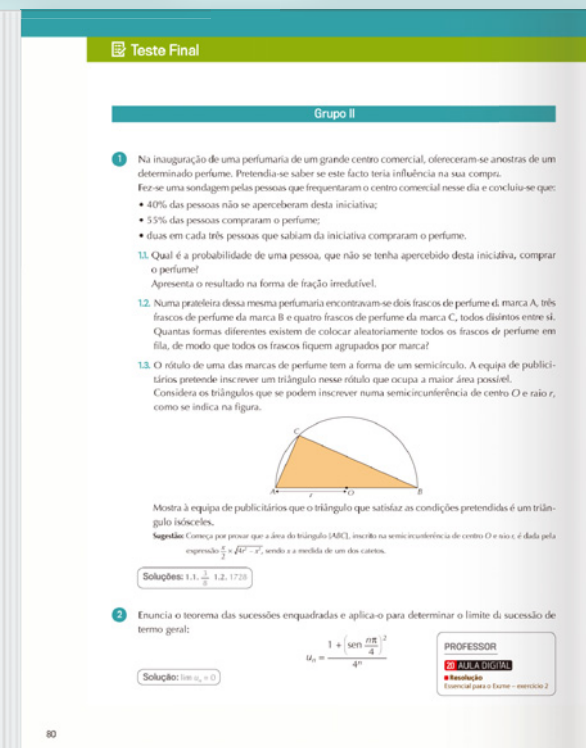
e **DESTREZA**
na resolução de exercícios

- Sínteses esquemáticas intercalares

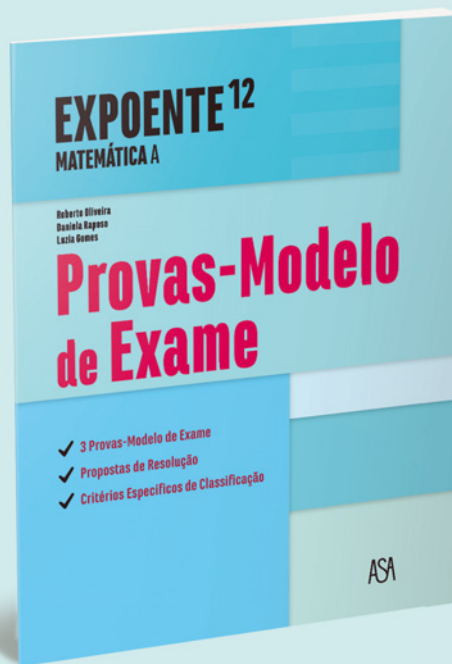
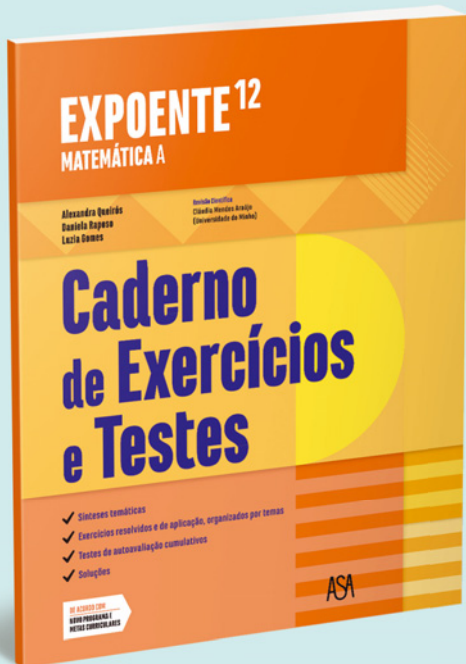
- Síntese global no fim de cada tema com exemplos e remissões para as páginas de teoria **NOVIDADE**



- Testes globalizantes, cumulativos, no final de cada tema **NOVIDADE**



RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS
DE TODOS OS EXERCÍCIOS



TREINO ADICIONAL PARA O EXAME

RESOLUÇÕES PROJETÁVEIS DE TODOS OS EXERCÍCIOS ✓

- Sínteses alternativas às do Manual **NOVIDADE**
- Exercícios resolvidos e exercícios propostos para treino, organizados por grau de dificuldade **NOVIDADE**
- 6 testes cumulativos para preparação dos momentos de avaliação, com matrizes de conteúdos e cotações
- 3 provas-modelo, respetivas propostas de resolução e critérios específicos de classificação

DOSSIÊ DO PROFESSOR

Destacamos:

- 30 questões de aula
- 1 teste de diagnóstico e 6 testes cumulativos **NOVIDADE**
- 2 propostas de planificação semanal, possibilitando a abordagem ao domínio "Primitivas e Cálculo Integral" **NOVIDADE**
- Planos de aula
- Propostas de resolução de todos os exercícios do projeto

MATERIAIS EDITÁVEIS EM 20 AULA DIGITAL ✓



Com ou sem internet, tenha acesso ao seu projeto escolar

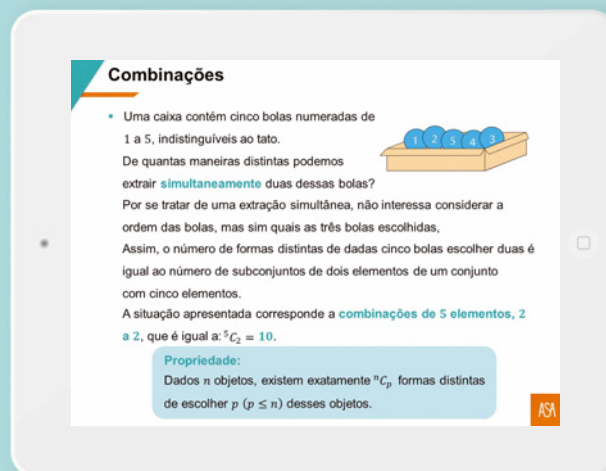
 Apresentações em PowerPoint®

 40 Simuladores GeoGebra®

 27 Resoluções animadas

 Testes Interativos

 Resoluções projetáveis



Apresentações em PowerPoint®
O essencial para todas as unidades



Resoluções animadas, passo a passo



- Múltiplos recursos para **projeção**, **acessíveis a partir da página do Manual** e **articulados** com os conteúdos
- **Fichas, testes** e apresentações em **PowerPoint® editáveis**, para adaptação às suas turmas
- Possibilidade de **envio de atividades para TPC com correção automática** e relatório global